Tentamen Fouriertheorie (W4). 29 nov.'02, 13.00, Tennishal

(1) De funkties $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ worden gegeven door $f_n(x) = (4x(1-x))^n$.
(a) Bereken $F(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor alle $x \in [0,1]$.
(b) Is de convergentie van f_n naar F uniform op $[0,1]$?
(c) Volgens welke stelling(en) is $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$?

(2) A is een deelverzameling van $\mathbf{R}^m$. Geef de definitie van de uitdrukking: "A heeft Lebesgue maat nul". Geef een voorbeeld van een oneindige verzameling A met Lebesgue maat 0.

(3) $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ wordt gegeven door $f(x) = x$ als $x \notin \mathbf{Q} \cap [0,1]$ en $f(x) = 5$ als $x \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$. Bewijs dat f Lebesgue integreerbaar is en bereken zijn Lebesgue integraal.

(4) Geef de definitie van $\mathcal{L}^i(\mathbf{R})$ voor $i = 1, 2$. Geef een voorbeeld van een f met $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ en $f \notin \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$.

(5) Formuleer Dirichlets stelling over convergentie van Fourierreeksen.

(6) Bewijs dat de Fourierreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx)$ uniform convergeert naar een continue differentieerbare funktie R.

(7) $f(x)$ is de 2π-periodieke funktie die voldoet aan $f(x) = \sin(x/2)$ voor $-\pi < x \leq \pi$. Bereken de Fourierreeks R van f. Voor welke x geldt $R(x) = f(x)$? Hint: gebruik de formule $\sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$.

(8) $a > 0$ en $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{C}$ wordt gegeven door $f(x_1, \ldots, x_m) = 1$ als $|x_i| \leq a$ voor alle i, en $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ voor andere waarden van $(x_1, \ldots, x_m)$. Bereken $\mathcal{F}(f)$.

(9) $f(x) := xe^{-\pi x^2}$. Bereken $\|f\|_2$ en de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$.

(10) $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{inx}$ en a is een positief reëel getal. Verder is $u = u(x,t)$ een funktie van x en t. Geef een oplossing van de partiële differentiaalvergelijking $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x}$ die voldoet aan $u(x,0) = f(x)$. Hint: Schrijf $u(x,t)$ als Fourierreeks in x met coëfficienten afhankelijk van t òf laat de Fouriertransformatie op de functie $u_t(x) := u(x,t)$ los.